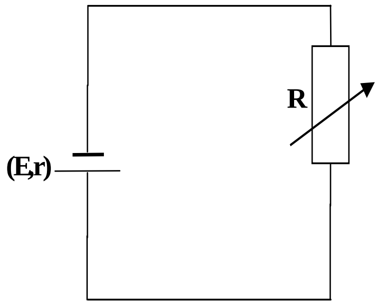
BAC PRO juin 1999 MATHEMATIQUES SCIENCES (2h00)
Equipements et Installations Electriques

Mathématiques

Exercice 1 : Etude d'une fonction. Recherche d'un maximum. (7 pts)

Soit le montage ci-contre :



Soient R la résistance du dipôle résistif, r la résistance interne du générateur et E sa force électromotrice.
La puissance P dissipée dans le dipôle résistif est égale à $\frac{R.E^2}{(R + r)^2}$.

Dans l'exemple donné E = 12 V, r = 1 Ω et R est variable.
Sachant que R est comprise entre 0,5 Ω et 9 Ω, on se propose de déterminer, pour quelle valeur de R, la puissance de P dissipée dans le dipôle résistif est maximale.

1. La résistance de R étant exprimée en ohms, montrer que la puissance P, exprimée en watts, est égale à $\frac{144\ R}{(R + 1)^2}$.
2. Soit la fonction f définie pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9] par : $f(x) = \frac{144\ x}{(x + 1)^2}$.

   On désigne par u et v les fonctions définies, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], respectivement par :
   $$u(x) = 144\ x \quad \text{et} \quad v(x) = (x + 1)^2.$$

   On note f ', u' et v' les fonctions dérivées des fonctions f, u et v.

   2.1) Déterminer la fonction u'.

   2.2) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], v'(x) = 2 (x +1)

   2.3) En utilisant le formulaire, montrer que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], on a :
   $$f'(x) = \frac{144(x+1)(1 - x)}{(x + 1)^4}$$

   2.4.1) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], $f'(x) = \frac{144(1- x)}{(x + 1)^3}$

   2.4.2) Dire pourquoi, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], le signe de f '(x) est le même que le signe de (1 – x).

   2.5) Etudier, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 9], le signe de f '(x).

   2.6) Déduire de la question précédente le sens de variations de la fonction f.

   2.7) Donner la valeur x_0 de x pour laquelle la valeur de f(x) est maximale.

3. En utilisant les résultats obtenus à la partie 1. et à la partie 2., indiquer pour l'exemple donné, la valeur de la résistance R pour laquelle la puissance P dissipée dans le dipôle résistif est maximale .

<u>Exercice 2 :</u> Représentation et valeur moyenne d'un signal sur un intervalle donné. (8 pts)

Dans tout ce problème T désigne le nombre réel $\frac{1}{50}$. On considère le signal s, de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

$$\begin{cases} s(t) = 2 + 6\cos(100\pi t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ s(t) = 2 & \text{si } \frac{T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

1. Compléter le tableau des valeurs sur l'**annexe 1**.

2. Sur la figure en **annexe 2**, dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot , Oy), la représentation graphique du signal s considéré sur l'intervalle [0 ; T[.

   2.1) Placer sur cette représentation graphique les points A, B, C, D, E et F de coordonnées respectives :

   $(0 ; s(t))$; $(\frac{T}{8} ; s(\frac{T}{8}))$; $(\frac{T}{4} ; s(\frac{T}{4}))$; $(\frac{T}{2} ; s(\frac{T}{2}))$; $(\frac{3T}{4} ; s(\frac{3T}{4}))$ et $(T ; s(T))$.

   2.2) Compléter le graphique de l'annexe 2 de sorte à visualiser, dans le plan rapporté au repère (Ot , Oy), la représentation du signal s considéré sur l'intervalle [– T ; 2T].

3.1) Soit l'intégrale J telle que $J = \int_{\frac{T}{4}}^{T} 2\,dt$. Montrer que $J = \frac{3}{100}$.

3.2) Calculer la fonction dérivée de la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \frac{T}{4}]$ par

$t \longmapsto \sin(100\pi t)$.

En déduire une primitive de la fonction définie sur $[0 ; \frac{T}{4}]$ par $t \longmapsto 6\cos(100\pi t)$.

Soit l'intégrale I telle que $I = \int_{0}^{\frac{T}{4}} (2 + 6\cos(100\,p\,t))dt$. Montrer que $I = \frac{3}{50\pi} + \frac{1}{100}$

3.3) La valeur moyenne $\overline{s}$ du signal s sur l'intervalle [0 ; T] est égale à $\frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)\,dt$.

Montrer que $\overline{s} = \frac{1}{T}(I + J)$, en déduire la valeur exacte de $\overline{s}$ puis sa valeur arrondie à 10^{-2}.

Sciences Physiques

<u>Exercice 1 :</u> (3 pts)

La lame d'une scie circulaire de diamètre 400 mm tourne à la fréquence de rotation nominale de 750 tr/min. Ce régime nominale est atteint en 3,2 s. Dans la phase de démarrage le mouvement est uniformément accéléré.

Calculer :

1) La vitesse angulaire nominale ω de la lame exprimée en rad/s, (arrondir au dixième).
2) La vitesse linéaire nominale v d'un point de la périphérie de la lame.
3) L'accélération angulaire α du mouvement pendant la phase de démarrage.
4) Le moment d'inertie J de la lame sachant que l'énergie cinétique E_k acquise par celle-ci quand elle tourne à 750 tr/min est de 620 J. On exprimera J en kg.m².

<u>Exercice 2 :</u> (2 pts)

Les alcanes linéaires ont pour formule brute C_nH_{2n+2} .
Leur température d'ébullition Θ (°C) sous la pression atmosphérique normale dépend du nombre n d'atomes de carbone par molécule.
Le tableau ci-dessous précise les valeurs mesurées de Θ pour n entier variant de 1 à 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Θ (°C)	– 165	– 84	– 39	0	34	63	96	125	150	176

1. En utilisant le tableau, indiquer à partir de quelle valeur de n la température d'ébullition est supérieure à 50° C. Nommer l'alcane correspondant.
2. Calculer la valeur de n pour l'alcane de masse molaire M = 114 g/mol. Donner sa formule brute.
3. Un alcane a pour formule brute C_8H_{18} . Nommer cet alcane et en indiquer une utilisation dans la vie courante.

Données : Masses molaires atomiques :
- pour le carbone, 12 g/mol.
- pour l'hydrogène, 1 g/mol.

ANNEXE

Annexe 1

Tableau de valeurs

t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
s(t)						

Annexe 2